FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE
ZAVOD ZA MATEMATIKU

SEMINARSKI RAD

DISKRETNI DINAMIČKI SUSTAVI –LOGISTIČKI MODEL

-KAOS-

Petra Sabljić

Zagreb, 2009.

SADRŽAJ

1 UVOD

Dinamika općenito govori o promjeni, stoga se može reći da dinamički sustav opisuje međusobnu zavisnost sustava varijabli i njihovu promjenu u vremenu. Dinamički sustavi opisani su diferencijalnim i diferencijskim jednadžbama, a da bi se uopće moglo predvidjeti ponašanje dinamičkog sustava za neki duži vremenski period potrebno je integrirati te jednadžbe. Integrira se pomoću analitičkih metoda ili pomoću iteracija (najčešće na računalu). Vidjet ćemo u daljnjem tekstu da su iteracije neophodne kod opisivanja diskretnih dinamičkih sustava.

Dinamički sustavi mogu biti kontinuirani, diskontinuirani te kombinacija navedenih (hibrdini). Kontinuiran ("fluidan", neisprekidan) je onaj sustav koji pokazuje da u proizvoljno malenom vremenskom periodu dolazi do promjene parametara (osim, naravno, u slučaju kada sustav miruje). Svi takvi sustavi su opisani diferencijalnim jednadžbama, i intuitivno su najbliži stvarnim uvjetima u prirodi. Diskontinuirani (diskretan, isprekidan, skokovit) je onaj sustav kod kojih se promjene ne događaju stalno, nego u diskretnim vremenskim intervalima.

Ponašanje dinamičkih sustava mogće je predočiti orbitama (trajektorijama), koje se, nakon dovoljno vremena, mogu razviti u skup koji nazivamo atraktorima. Atraktori čine dio faznog prostora promatranog sustava, odnosno njih smatramo geometrijskim podskupom faznog prostora. Orbita dinamičkog sustava unutar atraktora može biti periodna ili kaotična. Geometrijska predodžba dinamičnih sustava olakšava nam razumijevanje promatrnog sustava.

Pojave u prirodi i svijetu koji nas okružuje mogu se opisati korištenjem navedenih jednadžbi, s tim da realniji prikaz daju diskretni dinamički sustavi. Nerijetko, dinamički sustavi pokazuju kaotično ponašanje o čemu će također biti govora poslije. U meteorologiji, u kojoj je i sam E.Lorenz naišao na kaotično ponašanje, zatim u medicini, posebice kardiologiji, u biologiji kod praćenja populacija bioloških jedinki, u kemiji, gdje se prati kinetika reakcija, potrebno je korištenje ovih jednadžbi, a uvelike pomaže i poznavanje teorije kaosa.

2 DISKRETNI DINAMIČKI SUSTAVI

Promatramo realnu funkciju

$$f : \Re \to \Re$$

Uz neku fiksiranu vrijednost $x_0 \in \Re$ slijedi niz koji čini *orbitu (trajektorija, putanja)* x_o s obzirom na f :

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0), ..., x_n = f^n(x_0)$$

Točka x_o naziva se *sjeme* orbite. S f^n se označava *n*-ta iteracija od *f*, odnosno f^n je kompozicija od *n* članova same *f* funkcije.

Općenito se može napisati:

$$x_n = f^n(x_0) .$$

Primjer 1. $f(x) = x^2 + 1$

Orbita sjemena 0 izgleda ovako:

$$x_o = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 5$$

$$x_4 = 26$$

$$\ldots$$

$$x_n = \text{velik}$$

i tako dalje, iz čega je očito da orbita teži u beskonačno, odnosno *lim* $x_n = +\infty$ za $n \to \infty$.

Kažemo da je x_o fiksna točka za *f* ako je $f(x_o)=x_0$, jer je tada orbita *konstantan niz* x_0, $x_1=x_0$, $x_2= x_0$… i može se reći da je to fiksna orbita.

Analogno ravnotežnim rješenjima sustava diferencijalnih jednadžbi, fiksne točke imaju važnu ulogu u diskretnim dinamičkim sustavima. Isto tako, periodne točke perioda *n*, analogne su zatvorenim orbitama diferencijalnih jednadžbi. X_0 je periodan za *f* ako je $f^n(x_0)=x_0$ za neki $n > 0$. Kao i zatvorena orbita, periodna orbita se ponavlja:

$$x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_0$$

Orbite perioda *n* nazivaju se *n*- ciklusom. Periodna točka x_0 ima neki minimalni period *n* ako je *n* najmanji prirodni broj za koji vrijedi $f^n(x_0)=x_0$.

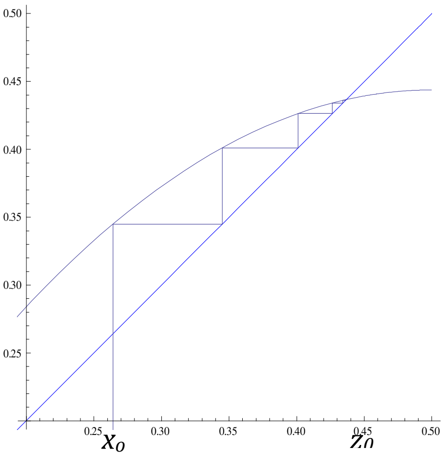
Primjer 2. Funkcija $f(x) = x^3$ ima fiksne točke u $x = 0, \pm 1$.

Primjer 3. Funkcija $g(x) = -x^3$ ima jedinu fiksnu točku u 0 i periodnu točku perioda 2 u $x=\pm 1$, jer je $g(1) = -1$ i $g(-1) = 1$, tako da je $g^2(\pm 1)$.

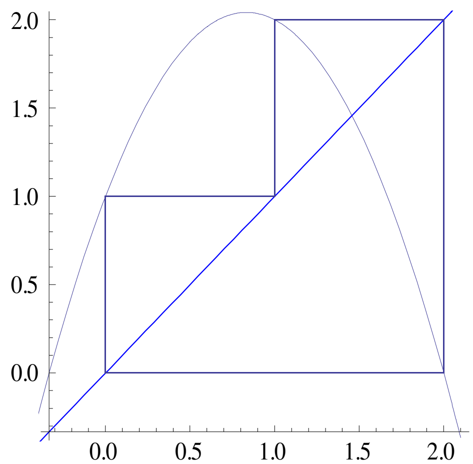
Primjer 4. Funkcija $h(x) = \frac{(2-x)(3x+1)}{2}$ ima periodnu točku 3.reda ili 3- ciklus s $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = x_0 = 0$… (grafička iteracija prikazana je na slici 2.2.)

2.1 GRAFIČKA ITERACIJA

Grafičkom iteracijom moguće je vizualizirati orbite jednodimenzionalnog diskretnog sustava. Na taj način možemo dobiti neke informacije o ponašanju sustava kojeg promatramo. Dakle, u koordinatnom sustavu nacrtamo krivulju $y = f(x)$ i pravac $y = x$ na istom grafu. Orbitu nekog sjemena x_0 ucrtavamo na graf tako da povlačimo vertikalnu liniju od pravca u početnoj točki (x_0, x_0) do krivulje u točki $(x_0, f(x_0)) = (x_o, x_1)$. Postupak se nastavlja povlačenjem horizontalne linije od točke (x_o, x_1) do pravca u (x_1,x_1). Na taj način se od sjemena x_0 dolazi do slijedeće točke na trajektoriji, te se gore navedeni postupak ponavlja od točke (x_1, x_1) povlačenjem druge vertikalne linije do točke (x_1, x_2) na krivulji. Zatim se opet povlači horizontalna linja od (x_1, x_2) do pravca u (x_2, x_2). Ovime se dobije niz parova linija koje završavaju na pravcu u nekoj točki (x_n, x_n), što se može vidjeti na slikama ispod.



Slika 2.1. Orbita sjemena x_o teži prema fiksnoj točki z_o



Slika 2.2. Orbita je periodna (3- ciklus).

U nekim slučajevima orbite fiksne točke x_0 ,, skaču s jedne strane fiksne točke na drugu pri svakoj iteraciji. Takve grafičke iteracije nazivamo i *mrežnim dijagramom*.

2.2 FIKSNE TOČKE

Postoji nekoliko tipova fiksnih točaka, tako da mogu biti privlačne, odbijajuće i neutralne.

Teorem. Neka funkcija f ima fiksnu točku u x_0

(i) ako je $|f'(x_0)| < 1$ tada je x_0 ponor ;

(ii) ako je $|f'(x_0)| > 1$ tada je x_0 izvor ;

(iii) ako je $f'(x_0) = \pm 1$ sve može biti.

Dokaz: ***(i)*** ako se pretpostavi $|f'(x_0)| = v < 1$ i uzme neki k za koji vrijedi $v < k < 1$, može se naći $\delta > 0$ takav da $|f'(x)| < k$ za sve x u intervalu $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Uz $x \in I$ imamo(prema Lagrangeovu teoremu srednje vrijednosti):

$$\frac{f(x) - x_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

za neki c između x i x_0. Odatle imamo

$$|f(x) - f(x_0)| < k\,|x - x_0|$$

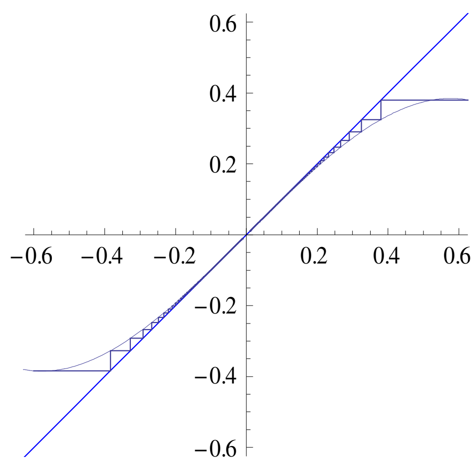
iz čega slijedi da je $f(x)$ bliža x_0 nego x, odnosno $f(x) \in I$. Primjenom ovog rezultata ponovno dolazimo do slijedećeg izraza:

$$|f(f(x)) - x_0| = |f^2(x) - x_0| < k\,|f(x) - x_0| < k^2\,|x - x_0|.$$

Ako ponavljamo postupak n puta možemo općenito napisati:

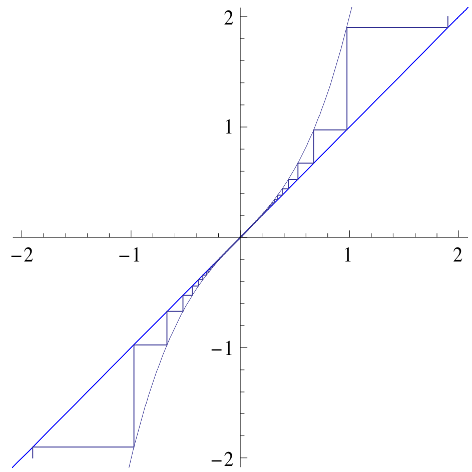
$$|f^n(x) - x_0| < k^n\,|x - x_0|,$$

tako da $f^n(x) \to x_0$ u I, uz $0 < k < 1$. Drugim riječima, ako je x_0 ponor, svaka iteracija u okolini te točke vodi u x_0. (slika 2.3)



Slika 2.3. Grafička iteracija funkcije $g(x) = x - x^3$

(ii) slično prethodnome, s razlikom da se radi o izvoru, odnosno odbijajućoj fiksnoj točki, što se može objasniti da točke u okolini izvora x_0, bježe iz I. Na slici 2.4. vidimo grafičku iteraciju s fiksnom točkom koja je izvor.



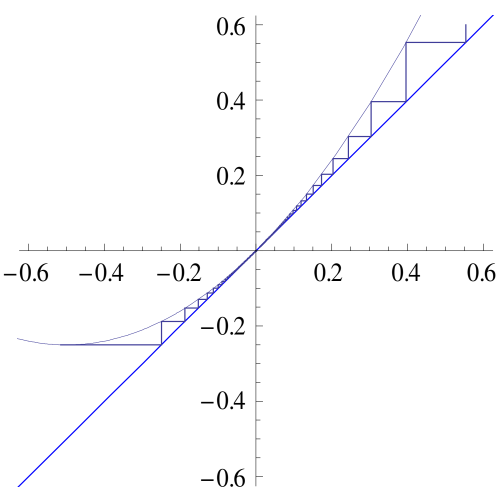
Slika 2.4. Grafička iteracija funkcije $f(x) = x + x^3$

(iii) $f(x) = x + x^3$;

$g(x) = x - x^3$;

$h(x) = x + x^2$;

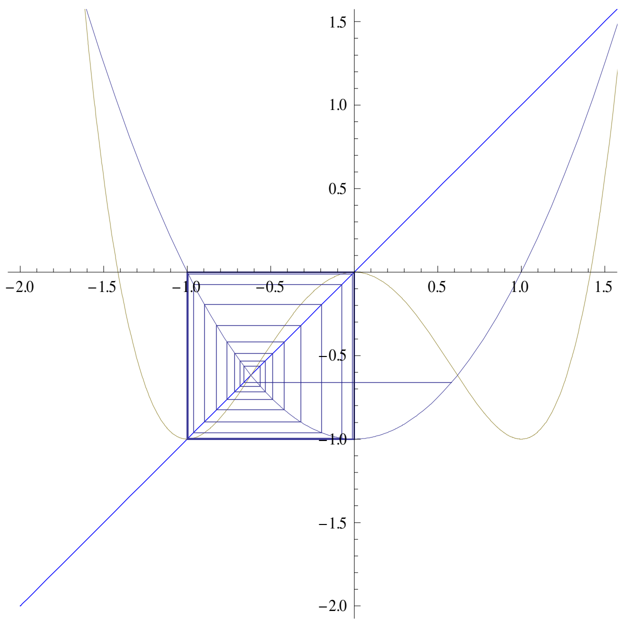
Svaka od ovih funkcija ima fiksnu točku u 0, s time da je $f\ '(0) = 1$. No, tek grafičkom iteracijom možemo vidjeti kako se ove funkcije razlikuju, što se može vidjeti na slikama 2.3, 2.4 i 2.5. Pa tako je u *f(x)* 0 izvor; *g(x)* u 0 ima ponor; *h(x)* nema nijedno, jer je 0 privlačna točka s jedne strane i odbijajuća s druge strane.



Slika 2.5. Grafička iteracija $h(x) = x + x^2$ koja ima i izvor i ponor

Dakle, možemo zaključiti da za neku funkciju *f*, periodna točka x_0 perioda *n* je fiksna točka od f^n , te ju možemo klasificirati kao ponor ili izvor ovisno o tome imamo li $|(f^n)'(x_0)| < 1$ ili $|(f^n)'(x_0)| > 1$.

Primjer 5. Funkcija $f(x) = x^2-1$ ima 2- ciklus u točkama 0 i -1. Lako se može dokazati da je $(f^2)'(0) = 0 = (f^2)'(-1)$, odnosno da je ovaj 2-ciklus ponor. Na slici 2.6. prikazana je grafička iteracija *f* s ucrtanim grafom f^2, gdje se vidi da su 0 i -1 privlačne fiksne točke za f^2.



Slika 2.6. Grafička iteracija $f(x)= x^2-1$ i $f^2(x)$

3 DISKRETNI LOGISTIČKI MODEL

Rast neke populacije može se opisati jednom od jednostavnijih nelinearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda – *logističkim modelom*, koji predstavlja kontinuirani logistički model:

$$\frac{dx}{dt} = kx(1-\frac{x}{M}),$$

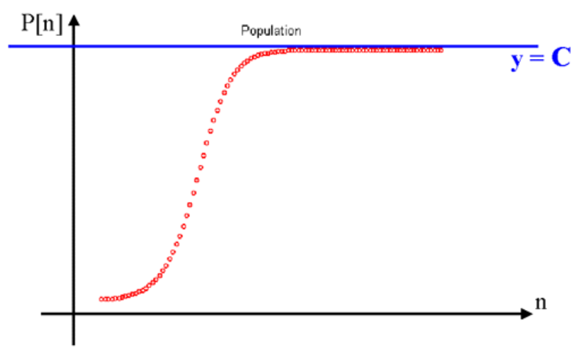
gdje je *t* vrijeme, *k* koeficijent rasta populacije, a M označava nosivi kapacitet, odnosno maksimalnu veličinu koju populacija može dosegnuti. *Dx/dt* predstavlja brzinu rasta populacije i možemo to kraće zapisati kao *x*'. Ovaj model često se naziva populacijskim modelom upravo zato jer se koristi za izračunavanje kretanja neke populacije, bilo neke životinjske vrste ili biljne ili čak populacije ljudi.

Dakle, kretanje neke populacije promatra se u zatvorenoj sredini s limitom (ograničenjem) *M* preko kojeg populacija ne može preći. Populacija ubrzano raste ako se krene od neke male vrijednosti, a onda u nekom trenutku prelazi u usporeni rast kako se približava nosivom kapacitetu. To se može dobro vidjeti na takozvanoj *S krivulji* (slika 3.1). Može se dogoditi da populacija kreće iznad nosivog kapaciteta pa u tom slučaju populacija ubrzano pada do neke vrijednosti kada usporeno pada do nosivog kapaciteta.

Kod logističkog modela moguće je doći do egzaktnog rješenja jednostavnim integriranjem gore danog modela te dolazimo do:

$$x(t) = \frac{M}{1+(\frac{M}{x_0}-1)e^{-kt}}$$

Također se može vidjeti da je brzina rasta populacije x' jednaka 0 kada je x=0 i x=M.



Slika 3.1. Populacijska *S*-krivulja, gdje je C- maksimalni kapacitet (broj populacije koja može nastaniti sustav)

Jedini problem koji se javlja jest taj da populacije generalno nisu kontinuirane funkcije vremena. Zbog toga se uzima prirodniji model pomoću kojeg bismo mogli promatrati rast jedne generacije neke populacije u vremenu Δt = 1, odnosno dolazimo do *diskretnog logističkog modela*.

Promatramo populaciju čiji se sudionici zbrajaju svake godine ili u nekom drugom definiranom vremenu. S x_n označimo populaciju na kraju godine *n (dok je* x_0 *početna vrijednost populacije)*. Ako pretpostavimo da ne može doći do prenapučenosti populacije, rast takve populacije možemo opisati modelom *eksponencijalnog rasta*, gdje se pretpostavlja da je

$$x_{n+1} = kx_n$$

za neku konstantu rasta $k > 0$ (ako je $k<0$ onda se populcija smanjuje). To zapravo znači da je populacija u sljedećoj godini direktno proporcionalna populaciji u promatranoj godini. Prema tome imamo:

$$x_1 = kx_0$$

$$x_2 = kx_1 = k^2x_0$$

$$x_3 = kx_2 = k^3x_0$$

$$\dots$$

Očito je da je $x_n = k^n x_0$. Ovo je primjer diferencijske jednadžbe 1. reda u kojoj se vrijednost x_n određuje iz vrijednosti x_{n-1}.

Iz eksponencijalnog modela rasta koji je bez ograničenja vidimo da do neograničenog rasta (eksplozije populacije) dolazi kada je stopa rasta $k \geq 1$, odnosno do neograničenog pada populacije (populacija izumire)za $0 \leq k < 1$ i za $k = 1$ populacija ostaje nepromijenjena (konstantna). No, u realnim uvjetima zbog prirodnih ograničenja (npr. ako se promatra populacija nekih životinjskih jedinki, ograničenja bi predstavljala ili nestanak hrane ili napad grabežljivaca ili neki drugi prirodni faktori) populacija raste dok ne dođe do neke kritične točke nakon koje pada i tako u krug, što zapravo predstavlja uobičajeni životni ciklus. Upravo zbog približenja realnim sustavima koristi se *diskretni logistički model*, koji je vrlo sličan kontinuiranom, s razlikom da se u diskretnom uvijek promatra samo jedna generacija u vremenu $\Delta t = 1$.

Populacijski model dakle možemo predočiti diskretnim logističkim modelom oblika:

$$x_{n+1} = kx_n(1 - \frac{x_n}{M})$$

gdje su k i M pozitivni parametri, x_{n+1} predstavlja broj populacije iduće godine, a x_n trenutnu populaciju. Uočimo da ako imamo $x_n \geq M$, onda je $x_{n+1} \leq 0$, što zapravo znači da populacija umire unutar godine koju promatramo. Dakle, x_n zapravo predstavlja varijablu koja opisuje stanje dinamičkog sustava.

Ako s x_n označimo dio maksimalne populacije, tako da je $0 \leq x_n \leq 1$, logistička diferencijska jednadžba tada postaje:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$$

gdje je λ > 0 parametar. Možemo predvidjeti sudbinu početne populacije x_0 jednostavnim integriranjem kvadratne funkcije $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, odnosno *logističkim preslikavanjem*. Tada imamo slijedeće:

$$x_0,$$
$$x_1 = \lambda x_0(1-x_0) = f_\lambda(x_0)$$
$$x_2 = \lambda x_1(1-x_1) = f_\lambda(x_1) = f_\lambda^2(x_0)$$

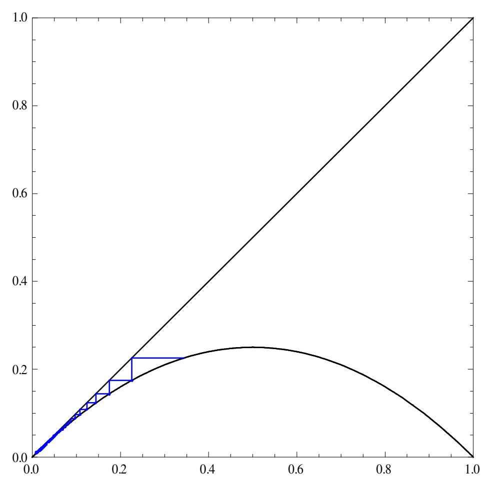
Ako krenemo rješavati diskretnu logističku (populacijsku) funkciju uz zadan početni uvjet x_0 mijenjajući parametar λ možemo pratiti kako se sustav ponaša i tada dolazimo da zanimljivih rješenja, što je pobliže opisano u daljnjem tekstu. Logističku funkciju promatramo unutar jediničnog intervala *I*.

Kada je 1< λ <4 logistička krivulja pokazuje zanimljivu dinamiku koja proizlazi iz početnih uvjeta za *I* = [0,1].

Promjenom parametra *λ* dolazi do slijedećih pojava:

0 < λ ≤ 1 – populacija izumire neovisno o x_0 i tu postoji jedna fiksna točka i to je 0, jer je $f_\lambda(0) = 0$

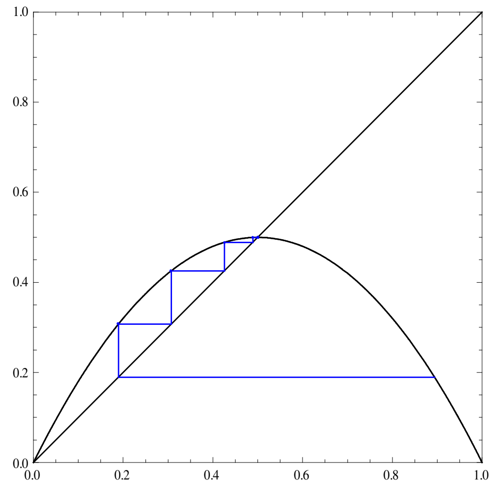
1 < λ ≤ 2 – stabilizira se na λ -1/ λ, neovisno o x_0



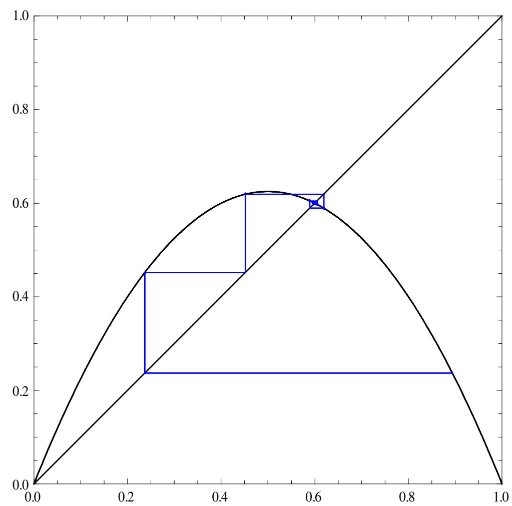
Slika 3.2. λ=1, imamo privlačnu fiksnu točku u 0

2 < λ ≤ 3 – nakon nekog vremena se također stabilizira na λ -1/ λ, ali prvo oscilira oko te vrijednosti

Postoji fiksna točka u $x_\lambda = (\lambda - 1)/\lambda$ u I za $\lambda > 1$ i ona je privlačna za $1 < \lambda \leq 3$, a odbijajuća za $\lambda > 3$.

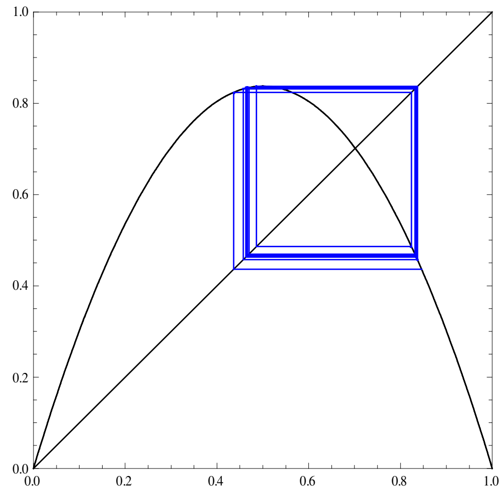


Slika 3.3. λ=2, fiksna točka je ½ (λ -1/ λ), bez obzira na vrijednost x_0

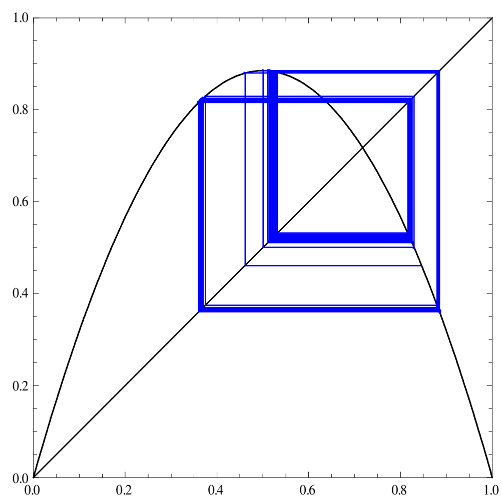


Slika 3.4. Za λ=2.5 nalazimo fiksnu točku u 0.6 , bez obzira na vrijednost x_0

Na vrijednostima 3< λ ≤4 moguće je uočiti promjene ponašanja dinamike sustava, Primjerice, na vrijednostima između 3 i oko 3,45 populacija oscilira između dvije vrijednosti zauvijek i može se dogoditi kvadrat oko točke (2- ciklus), zatim na vrijednostima 3,45-3,54 oscilira između 4 vrijednosti zauvijek, nakon 3,54 između 8 vrijednosti, zatim 16, pa 32 i tako dalje. Na otprilike 3,57 zapaža se početak kaotičnog ponašanja, jer za vrlo male promjene početne populacije dolazi do značajnih promjena s vremenom. Daljnjim povećanjem perioda, sustav postaje sve *kaotičniji*.



Slika 3.5. λ=3.35, za x_0=0.84



Slika 3.6. λ=3.54, za x_0=0.84

Kada je λ = 4, *x* prelazi preko svih vrijednosti u intervalu [0,1], što se jasno vidi na slici 4.1. (to je kaotično ponašanje).

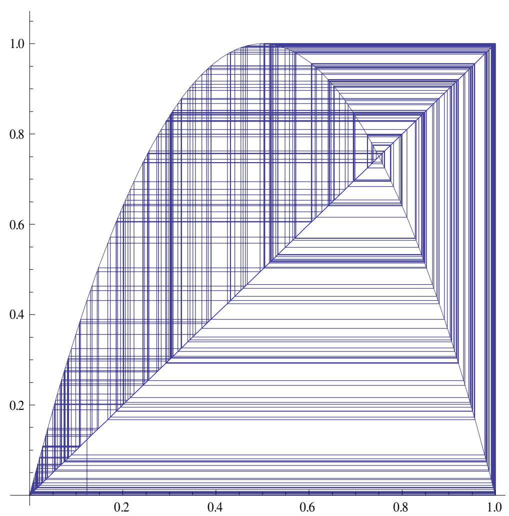
Za sve vrijednosti λ moguće je provjeriti dinamiku sustava uz prozvoljno odabranu inicijalnu vrijednost populacije kao i proizvoljan broj iteracija, u svakom slučaju logistički se model za navedene vrijednosti ponaša kao što je i prethodno objašnjeno.

Dakle, sustav opisan logističkim modelom (u ovom slučaju populacija bioloških jedinki) prolazi kroz sve faze koje dinamički sustav može manifestirati. Počinje sa stabilnim fiksnim točkama (točkasti atraktori), preko stabilnih graničnih ciklusa te na kraju završava u kaosu, uz tipična svojstva koja ga obilježavaju: nepredvidljivost vremenskih nizova i preosjetljivost na početne uvjete.

4 KAOS

Kaos najčešće opisujemo kao ponašanje nekog dinamičkog sustava koji je iznimno osjetljiv na početne uvjete, odnosno uz vrlo male promjene početnih uvjeta, u nekoj slijedećoj generaciji dolazi do velikih razlika i nepredvidivog ponašanja.

Vidjeli smo kako se ponaša populacijska jednadžba uz promjenu parametra λ i da se početak kaosa može zapaziti već na vrijednostima λ oko 3.57. Za λ=4 zapaža se kaotično ponašanje u punom smislu te riječi, što se vidi i na slici ispod. Također se time može potvrditi da na toj vrijednosti orbite zauzimaju cijeli interval $I = [0,1]$.



Slika 4.1. Prikazana je orbita sjemena x_0 uz λ =4, s 500 iteracija

Moguće je navesti definiciju kaosa u dinamičkim sustavima, koja je primjenjiva na velikom broju primjera uz napomenu da postoji više definicija kojima su različiti autori pokušali doprinjeti razumijevanju kaotičnog ponašanja.

U tu svrhu promatramo neku funkciju f: $I \rightarrow I$ na intervalu $I = [\alpha, \beta]$. Funkcija f je kaotična na intervalu I ako :

(1) Periodne su točke guste na I;

(2) f je tranzitivna na I; ako postoji $x_0 \in U_1$ tako da bude $x_n \in U_2$ za neki n, gdje U predstavlja otvoreni podinterval od I

(3) f je senzibilna na I; ako postoji konstanta senzibilnosti $\beta > 0$ takva da za bilo koji $x_0 \in U$ i neki otvoreni interval U oko x_0, postoji sjeme $y_0 \in U$ i $n > 0$ takav da vrijedi:

$$\left| f^n(x_0) - f^n(y_0) \right| > \beta$$

Uvjet tranzitivnosti ekvivalentan je postojanju orbite koja je gusta na I. Zapravo, gustoća orbita implicira tranzitivnost, jer takva orbita ponavljano ulazi u bilo koji otvoreni podskup I.

Navedeno možemo pokazati i na primjerima dupliciranja i slično tome na šator preslikavanju.

Primjer 4.1. Dupliciranje (The Doubling Map).

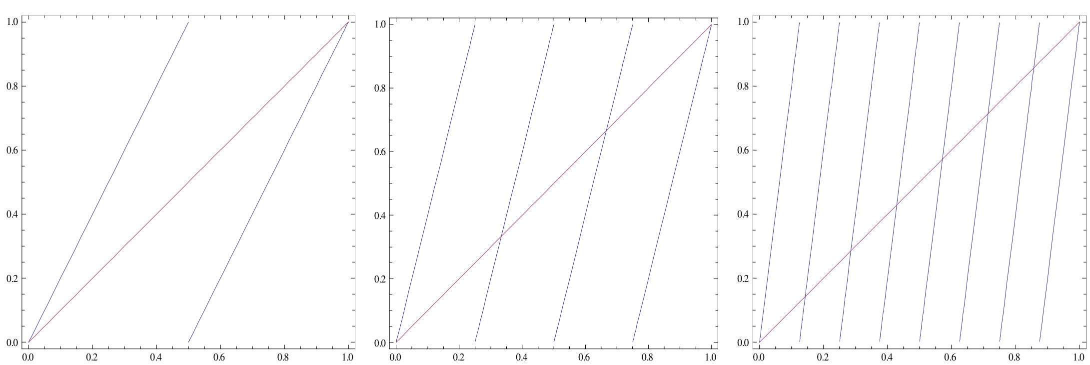
$D : [0,1) \to [0,1)$ s $D(x) = 2x \bmod 1$, odnosno

$$D(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \le x < 1 \end{cases}$$

Jednostavnim računom može se pokazati da je

$$D^n(x) = 2^n x \bmod 1,$$

tako da se graf D^n sastoji od 2^n ravnih linija s nagibom 2^n, od kojih se svaka proteže duž cijelog intervala [0, 1), što se može jasnije predočiti grafički na slikama ispod.



(a) (b) (c)

Slika 4.2. Grafički prikaz dupliciranja funkcije D (a) s iteracijama D^2 (b) i D^3 (c) na intervalu [0, 1)

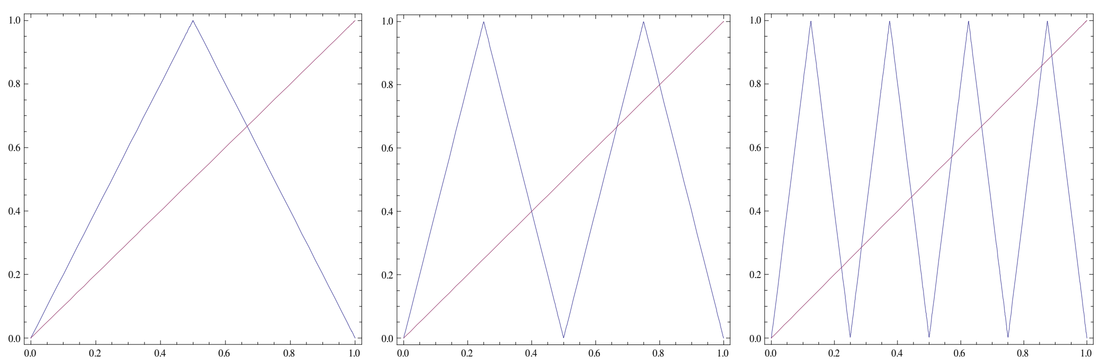
D je kaotična na intervalu [0, 1), jer D^n preslikava bilo koji period oblika $[k/2^n, (k+1)/2^n)$ za $k = 0,1,\ldots 2^n - 2$ na interval [0, 1).

Nadalje, graf D^n prelazi pravac $y = x$ u nekim točkama ovog intervala, tako da postoji periodna točka u svakom takvom intervalu. S obzirom da je duljina intervala $1/2^n$, slijedi da su periodne točke guste na [0, 1). Za neki otvoreni interval *J* može se pronaći interval oblika $[k/2^n, (k+1)/2^n)$ unutar *J* za neki dovoljno veliki *n*, jer D^n preslikava *J* na cijeli [0, 1). Ovime se pokazuje tranzitivnost, ali isto tako i senzibilnost, s konstantom senzibilnosti 1/2.

Primjer 4.2. Šator preslikavanje (The Tent Map).

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1/2 \\ -2x + 2 & 1/2 \le x < 1 \end{cases}$$

T je kaotična na [0, 1) isto kao i *D*, što se grafički vidi na slici ispod. Sa šator preslikavanjem događa se ista situacija kao kod dupliciranja, a naziv šator preslikavanje posljedica je izgleda same funkcije.



(a) (b) (c)

Slika 4.3. Šator preslikavanje; (a) prikazuje T, (b) T^2 i (c) T^3 na intervalu [0, 1)

Šator funkcija i logistička funkcija $f_4(x) = 4x(1-x)$ su topološki konjugirane funkcije i u tom smislu pokazuju ista svojstva odnosno ponašanje kod iteracije. Za dvije funkcije kažemo da su konjugirane ako postoji homeomorfizam koji će ih konjugirati jednu u drugu, a homeomorfizam označava preslikavanje f: S→S' koje je neprekidna bijekcija.

Da bismo pokazali svojstvo konjugacije pretpostavimo slijedeće: $f: I \rightarrow I$ i $g: J \rightarrow J$, gdje su I i J promatrani intervali. Kažemo da su f i g konjugirane ukoliko postoji homeomorfizam $h: I \rightarrow J$ takav da h zadovoljava jednadžbu konjugacije $h \circ f = g \circ h$. Iz toga slijedi da konjugacija preslikava orbite od f u orbite od g, jer imamo da je $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$ za sve $x \in I$, odnosno h preslikava n-tu točku na orbiti x pod f na n-tu točku na orbiti $h(x)$ pod g. Slično tomu, inverzna funkcija h^{-1} preslikava orbite od g na orbite od f.

Konjugacije su vrlo važne sa stajališta kaotičnih sustava, jer preslikavaju jedan kaotičan sustav na drugi.

5 TEORIJA (DETERMINISTIČKOG) KAOSA

Riječ “kaos” potječe iz grčkog jezika, a znači nešto nepredvidivo i posve slučajno, dok determinizam označava nešto predvidljivo, postojanje nekog odnosa koji je točno određen uzročno-posljedičnim vezama.

Simulirajući obrasce vremenskih prilika, Edward Lorenz (fizičar), uočio je još 1960.godine, da vrlo male, neznatne, promjene početnih uvjeta dovode do potpuno različitih rezultata. Ovaj pojam poznat je pod nazivom 'leptirov učinak'. Matematički model kojim je opisao takvo ponašanje temelj je teorije kaosa. Dakle, tek nezamjetnom promjenom početnih parametara, u nekom vremenu došlo bi do potpuno nepredvidivih promjena ekstremnih razmjera (eksponencijalni rast razlika).

Pojam deterministički kaos uveden je, jer je dinamika sustava u budućnosti u potpunosti određena (determinirana) početnim uvjetima, bez ikakvih slučajnih elemenata. No, deterministička priroda ovih sustava ih ne omogućava predviđanje njihova ponašanja.

LITERATURA

1. M.W.Hirch, S.Smale, R.L.Davaney, Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos, second edition, Elsevier Academic Press 2003.
2. http://www.inet.hr/~ivnakic/kaos/2-2-Kontinuirani_sustavi.htm
3. http://hr.wikipedia.org/wiki/Teorija_kaosa
4. http://www.fsb.hr/matematika/download/ZS/razno/eksponencijalni_i_logisticki_rast.pdf
5. http://elgrunon.wordpress.com/
6. http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map